5.2.9 Vzdálenost bodu od roviny

Předpoklady: 5208

Opakování z minulé hodiny (definice vzdálenosti bodu od přímky):
Je dána přímka p a bod A. Vzdáleností bodu A od přímky p rozumíme vzdálenost bodu A od bodu P, který je patou kolmice vedené v rovině Ap k přímce p z bodu A.

Máme A bod a rovinu ρ, vzdálenost bodu A od roviny ρ opět potřebujeme převést na vzdálenost dvou bodů. Jaký bod máme v rovině ρ najít?
Podobně jako u vzdálenosti bodu od přímky půjde o kolmý průmět bodu A do roviny ρ.

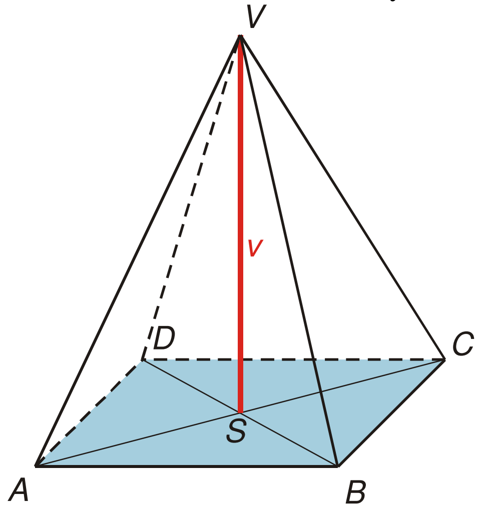
Př. 1: Zformuluj definici vzdálenosti bodu od roviny analogickou definici vzdálenosti bodu od přímky.

Je dána rovina ρ a bod A. Vzdáleností bodu A od roviny ρ rozumíme vzdálenost bodu A od bodu P, který je patou kolmice vedené z bodu A k rovině ρ.

Takto definovaná vzdálenost bodu od roviny je nejkratší vzdáleností mezi bodem A a libovolným bodem roviny ρ.

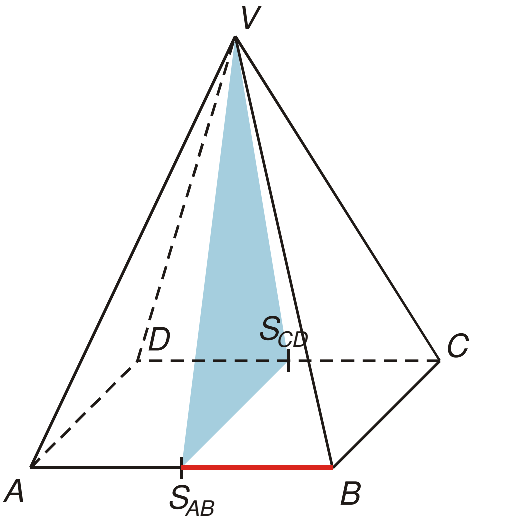
Př. 2: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$, $|SV| = v = 5\,\text{cm}$. Urči:
a) vzdálenost bodu V od roviny ABC, b) vzdálenost bodu B od roviny $S_{AB}S_{CD}V$,
c) vzdálenost bodu S_{BC} od roviny ADV.

a) vzdálenost bodu V od roviny ABC



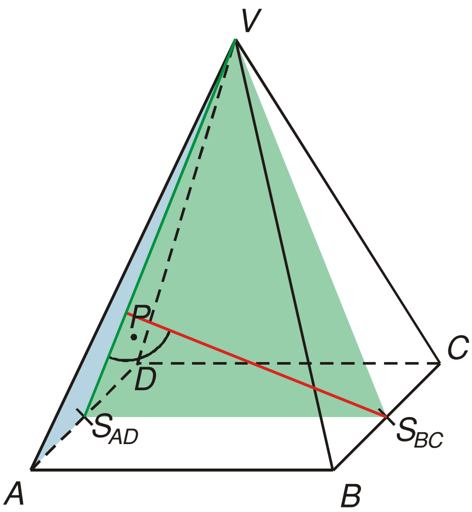
Z obrázku je vidět, že kolmým průmětem bodu V do roviny ABC je střed podstavy S $\Rightarrow$ vzdálenost bodu V od roviny ABC je tedy rovna $v = 5\,\text{cm}$.

b) vzdálenost bodu B od roviny $S_{AB}S_{CD}V$

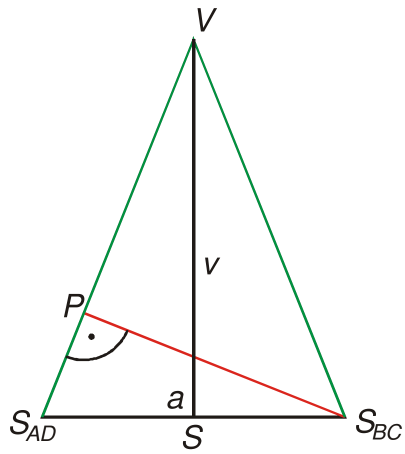


Přímka AB je kolmá k rovině $S_{AB}S_{CD}V$, kolmým průmětem bodu B do roviny $S_{AB}S_{CD}V$ je tedy bod S_{AB} $\Rightarrow$ vzdálenost bodu B od roviny $S_{AB}S_{CD}V$ je rovna $\frac{a}{2} = 2\,\text{cm}$.

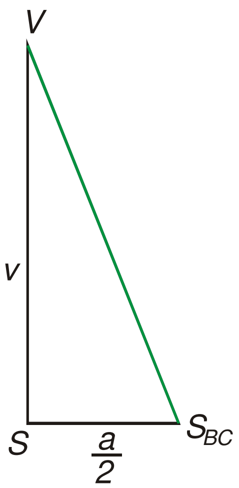
c) vzdálenost bodu S_{BC} od roviny ADV



Kolmý průmět bodu S_{BC} (označíme si ho P) do roviny ADV bude určitě ležet v rovině $S_{AD}S_{BC}V$ (je kolmá na rovinu ADV a prochází bodem S_{BC}). Nakreslíme si trojúhelník $S_{AD}S_{BC}V$.



Vypočteme délku strany $S_{BC}V$ z pravoúhlého trojúhelníku $S_{BC}VS$.

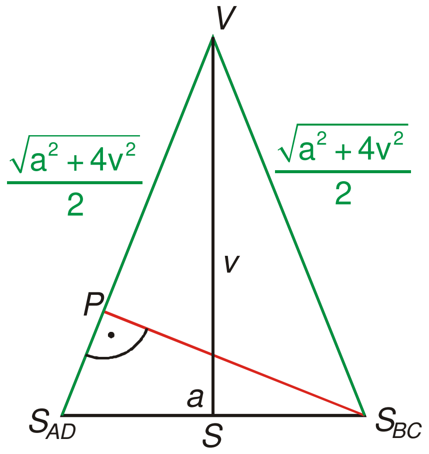


$$|S_{BC}V|^2 = |SS_{BC}|^2 + |SV|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{a^2 + 4v^2}{4}$$

$$|S_{BC}V| = \sqrt{\frac{a^2 + 4v^2}{4}}$$

$$|S_{BC}V| = \frac{\sqrt{a^2 + 4v^2}}{2}$$

Doplníme do obrázku trojúhelník $S_{AD}S_{BC}V$.



Možností jak určit úsečku PS_{BC} je více, nejjednodušší vychází ze vzorce pro obsah trojúhelníka:

$$S=\frac{av_a}{2}=\frac{bv_b}{2}=\frac{cv_c}{2}.$$

Jednu dvojici strana-výška tvoří úsečky $S_{AD}S_{BC}$ a SV (obě známe), druhou úsečky $S_{AD}V$ a PS_{BC} (druhou chceme určit) $\Rightarrow$

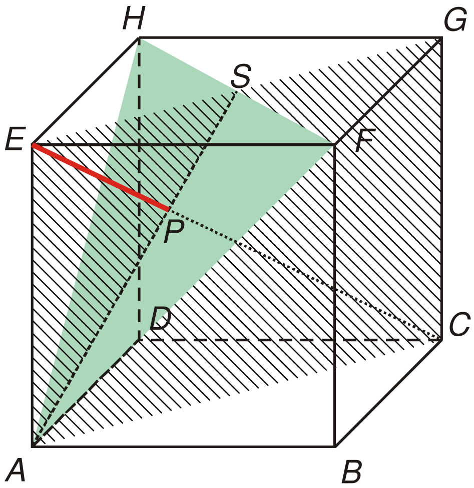
$$S=\frac{av_a}{2}=\frac{|S_{AD}S_{BC}||SV|}{2}=\frac{|S_{BC}V||PS_{BC}|}{2}$$

$$|S_{AD}S_{BC}||SV|=|S_{BC}V||PS_{BC}|$$

$$|PS_{BC}|=\frac{|S_{AD}S_{BC}||SV|}{|S_{BC}V|}=\frac{av}{\frac{\sqrt{a^2+4v^2}}{2}}=\frac{2av}{\sqrt{a^2+4v^2}}$$

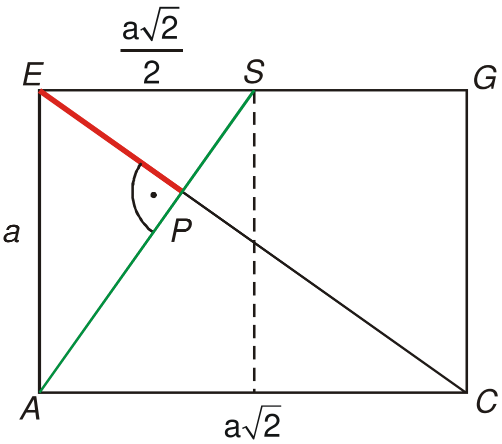
Dosadíme: $|PS_{BC}|=\frac{2av}{\sqrt{a^2+4v^2}}=\frac{2\cdot 4\cdot 5}{\sqrt{4^2+4\cdot 5^2}}\text{cm}=3{,}71\text{cm}$.

Př. 3: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH* $a=4\text{cm}$. Urči vzdálenost bodu *E* od roviny *AFH*.



Hledáme kolmý průmět bodu *E* do roviny *AFH*. Víme z předchozích příkladů, že přímka *EC* je kolmá k rovině *AFH* a hledaným průmětem bude její průsečík s rovinou *AFH*. Předchozí informaci pro vyřešení příkladu nepotřebujeme, stačí si uvědomit, že krychle je souměrná podle roviny *ACEG* a kolmice na *E* i kolmý průmět musí ležet v této rovině (jinak by průměty byly dva a to není možné).

Nakreslíme si obdélník *ACGE*.



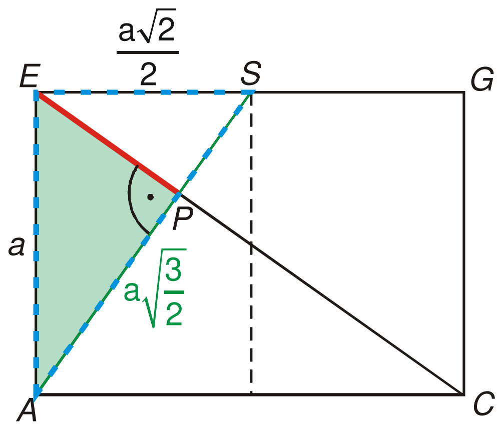
Dopočteme délku úsečky *AS*:

$$|AS|^2=|ES|^2+|EA|^2=a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$|AS|^2=a^2+\frac{2}{4}a^2=\frac{3}{2}a^2$$

$$|AS|=a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Doplníme obrázek:



Využijeme podobnost trojúhelníků ASE a AEP.

$$\frac{|ES|}{|AS|}=\frac{|EP|}{|AE|}$$

$$|EP|=|AE|\frac{|ES|}{|AS|}=a\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}}=a\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dosadíme: $|EP|=a\frac{\sqrt{3}}{3}=4\frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}=2{,}31\,\text{cm}$

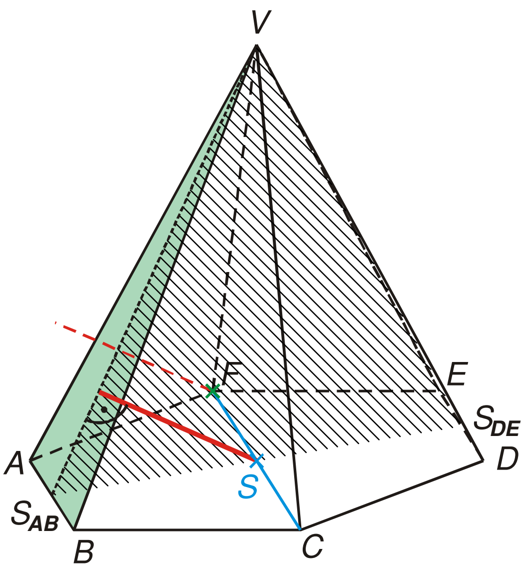
Př. 4: Zformuluj kritérium pro rovnoběžnost přímky s rovinou pomocí vzdálenosti bodu od roviny.

Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ, jestliže lze na přímce p najít dva různé body ležící v témž poloprostoru ohraničeném rovinou ρ, které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.

Př. 5: Zformuluj kritérium pro rovnoběžnost dvou rovin pomocí vzdálenosti bodu od roviny.

Dvě roviny ρ a σ jsou rovnoběžné, jestliže lze v rovině σ najít tři různé body, které neleží v přímce, ale leží ve stejném poloprostoru s hraniční rovinou ρ a které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.

Př. 6: Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB|=a=4\,\text{cm}$, $|SV|=v=6\,\text{cm}$. Urči vzdálenost bodu F od roviny ABV.

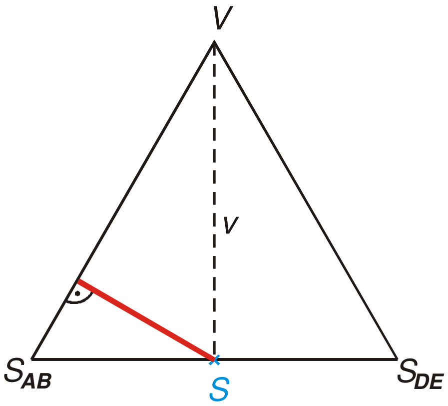


Potřebujeme najít kolmý průmět bodu F do roviny ABV $\Rightarrow$ problém pata kolmice z bodu F leží mimo jehlan $\Rightarrow$ hledáme jiný bod se stejnou vzdáleností, jehož pata leží na hranici jehlanu.

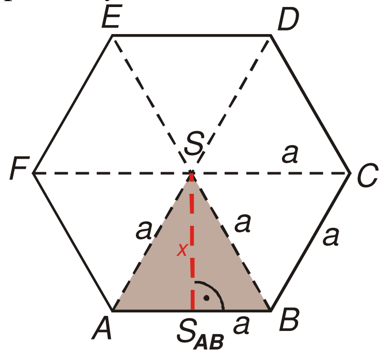
Přímka CF je rovnoběžná s přímkou AB $\Rightarrow$ je rovnoběžná s rovinou ABV $\Rightarrow$ vzdálenost všech bodů této přímky od roviny ABV je stejná jako vzdálenost bodu A.

Kolmice z bodu S na rovinu ABV leží v rovině $S_{AB}S_{DE}$ $\Rightarrow$ vzdálenost bodu S od roviny ABV určíme pomocí trojúhelníku $S_{AB}S_{DE}V$.

Nakreslíme si trojúhelník $S_{AB}S_{DE}V$.



Délku úsečky $S_{AB}S$ určíme z obrázku podstavy:



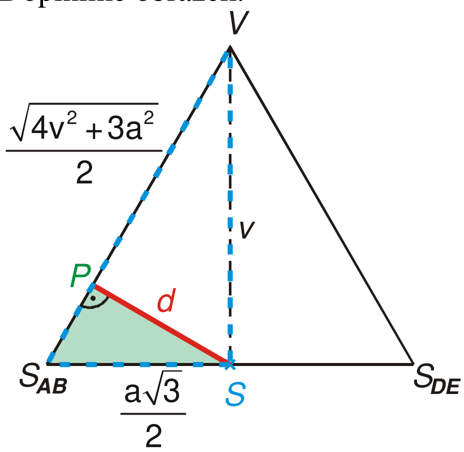
Vzdálenost $|S_{AB}S|$ je také výškou v rovnostranném trojúhelníku se stranou a.

$$x^2 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vzdálenost $|S_{AB}V|$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníku $S_{AB}SV$:

$$|S_{AB}V| = \sqrt{v^2 + x^2} = \sqrt{v^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4v^2 + 3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4v^2 + 3a^2}}{2}.$$

Doplníme obrázek:



Využijeme podobnost trojúhelníků $S_{AB}SV$ a $S_{AB}SP$.

$$\frac{|SV|}{|S_{AB}V|} = \frac{|PS|}{|S_{AB}S|}$$

$$|PS| = |SV|\frac{|S_{AB}S|}{|S_{AB}V|} = v\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{4v^2+3a^2}}{2}} = \frac{v \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{4v^2+3a^2}}$$

Dosadíme: $|PS| = \frac{v \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{4v^2+3a^2}} = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 6^2 + 3 \cdot 4^2}}\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$.

Př. 7: Petáková:
strana 93/cvičení 24 c) f)
strana 93/cvičení 25 b)
strana 93/cvičení 26 c)
strana 93/cvičení 27 c)

Shrnutí: Vzdálenost bodu od roviny určujeme opět pomocí kolmého průmětu.